РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАННОМ СЕКТОРЕ

С.В. Замятин, С.А. Гайворонский

Томский политехнический университет
E-mail: zamsv@aics.ru

Рассматривается характеристический полином системы, в коэффициенты которого линейно входят интервально-заданные и настраиваемые параметры. Предлагается подход, позволяющий обеспечить расположение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы в заданном секторе и локализацию остальных ее полюсов в заданной области комплексной плоскости. Приводится числовой пример.

1. Введение

Одной из основных задач, решаемых при проектировании систем автоматического управления, является задача обеспечения требуемого качества переходных процессов, которое зависит от расположения полюсов замкнутой системы. Известно, что динамические свойства системы определяются ее двумя-тремя доминирующими полюсами, так как влияние остальных полюсов оказывается незначительным из-за их удаленности от мнимой оси [1].

Для стационарной системы решение задачи размещения доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в работах [2, 3]. Отличительной особенностью подхода, предложенного в [3], является возможность не только обеспечивать требуемое положение назначаемых доминирующих полюсов, но и размещать остальные (свободные) полюсы в желаемой области.

Однако большинство реальных систем автоматического управления имеют параметры, которые изменяются в определенных пределах по заранее неизвестным законам или неточно заданы. Если передаточные функции систем содержат полиномы с интервальными коэффициентами, то согласно [4] они классифицируются как линейные интервальные динамические системы (ЛИДС). Коэффициенты характеристических полиномов ЛИДС на основе правил интервальной арифметики могут быть представлены интервалами, что позволяет отнести полиномы к классу интервальных. Решение задачи размещения полюсов систем с интервальными полиномами рассматривается в ряде работ [5, 6]. Однако предлагаемые в этих работах методы синтеза регуляторов предусматривают, что все компоненты вектора состояния должны быть доступны для измерения.

В этой связи представляет интерес робастное расширение подхода, предложенного в [3] и позволяющего для решения поставленной задачи использовать линейный динамический регулятор по выходу. Поскольку коэффициенты характеристического полинома имеют фиксированные пределы изменения, то полюсы системы оказываются локализованными в некоторых замкнутых областях. Желаемое размещение доминирующих и свободных полюсов предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы при любых значениях интервальных параметров. Следовательно, при размещении полюсов ЛИДС необходимо реализовать принцип доминирования на основе обеспечения региональной робастной устойчивости.

2. Постановка задачи

Пусть объект управления ЛИДС задан передаточной функцией

$$W(p)=\frac{C(p)}{D(p)}=\frac{\sum_{i=0}^{u} c_i p^i}{\sum_{i=0}^{z} d_i p^i}, \qquad (1)$$

где c_i и d_i – интервальные коэффициенты, а u, z – соответственно степени полиномов $C(p)$ и $D(p)$. Передаточная функция динамического регулятора имеет вид

$$W_p(p)=\frac{\sum_{i=0}^{l}k_ip^i}{\sum_{i=l+1}^{r}k_ip^{i-l-1}}, \qquad (2)$$

где k_i, i=1,2,...,r – настраиваемые параметры, l – их количество в числителе $W_p(p)$. Тогда характеристическое уравнение ЛИДС может быть представлено в виде

$$R(p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(\bar{k},\bar{c},\bar{d})p^i, \qquad (3)$$

где $\bar{c}$ и $\bar{d}$ – векторы значений интервальных коэффициентов полиномов $C(p)$ и $D(p)$, $\bar{k}$ – вектор настраиваемых параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты полинома (3), a_i – интервальные коэффициенты полинома (3), являющиеся функциями $\bar{k},\bar{c},\bar{d}$.

Необходимо выбрать такие значения параметров k_i, i=1,2,...,r, чтобы при возможных вариациях интервальных коэффициентов полинома (3) колебательность доминирующих полюсов ЛИДС не превышала допустимую, а свободные полюсы были локализованы в заданной области.

Так как в выражение (3) входят интервальные коэффициенты, то оно соответствует семейству полиномов. Очевидно, что применение методики [3] к каждому полиному этого семейства невозможно, поэтому желательно найти условия, позволяющие судить о максимальной колебательности ЛИДС по одному полиному. В связи с этим предлагается разделить поставленную задачу на две:

1. Выделить из заданного семейства полиномов одного полинома $R_b(p)$, который будет гарантированно определять максимальную колебательность интервальной системы.
2. Разместить корни найденного полинома желаемым образом (с соблюдением принципа доминирования), в соответствии с методикой [3].

3. Определение пределов коэффициентов полинома с максимальной колебательностью корней

Пусть m полюсов p_g, $g=\overline{1,m}$, лежат левее полюса p_0. Обозначим через Θ_g угол между вещественной осью и вектором, направленным к полюсу p_0 от полюса p_g.

Утверждение 1. Сумма углов между векторами, направленными от полюсов p_g, $g=\overline{1,m}$ к полюсу p_0, и действительной осью определяется неравенством

$$0<\sum_{g=1}^{m}\Theta_g<\frac{\pi}{2}m. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть m=1. Очевидно, что в данном случае при перемещении вещественного полюса p_1 левее p_0, угол $\Theta_1\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

Пусть m=2, $p_{1,2}=-\alpha_1\pm j\beta_1$, $p_0=-\alpha_2+j\beta_2$.

Тогда, используя тригонометрические соотношения, легко получить

$$\sum_{g=1}^{n}\Theta_g=\operatorname{arcctg}\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_2^2-\beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)}\right). \qquad (5)$$

При изменении α_1, β_1 имеем

$$\lim_{\alpha_1\to\infty}\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_2^2-\beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)}\right)\to\infty,$$

$$\lim_{\alpha_1\to\alpha_2,\beta_2>\beta_1}\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_2^2-\beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)}\right)\to-\infty.$$

Следовательно, при m=2 на основании свойств функции котангенса, $\sum_{g=1}^{2}\Theta_g\in[0;\pi]$.

Сумма углов Θ_g при других m может быть представлена суммами углов при m=1 и m=2. Следовательно, неравенство (4) будет выполняться при любых m.

Для определения полинома $R_b(p)$, корни которого определяют максимальную колебательность всего заданного семейства полиномов, воспользуемся фазовыми соотношениями углов выхода ветвей корневого годографа [7]. Угол выхода из комплексного корня при увеличении интервального коэффициента a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q=\pi-\left(\sum_{g=1}^{m}\Theta_g+\frac{\pi}{2}\right)+i\Theta_0, \qquad (6)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q=-\left(\sum_{g=1}^{m}\Theta_g+\frac{\pi}{2}\right)+i\Theta_0, \qquad (7)$$

где Θ_g и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными к некоторому корню от g-го полюса и от i-х нулей с координатами (0;j0), соответственно. Величина $\frac{\pi}{2}$ добавлена в связи с учетом корня, комплексно-сопряженного p_0.

На основании (6) и (7), получим условие для углов выхода корня с максимальной колебательностью: для того, чтобы корень определял максимальную колебательность области его локализации, необходимо, чтобы векторы, задающие углы выхода данного корня по всем a_i, $i=\overline{0,n}$, были направлены внутрь сектора $\Gamma\pm\Theta_0$, т. е. выполнялось условие:

$$\Theta_0<i\Theta_0-\left(\sum_{g=1}^{m}\Theta_g+\frac{\pi}{2}\right)+\Omega<\Theta_0+\pi, \qquad (8)$$

где Ω=0,π в зависимости от того, увеличивается или уменьшается интервальный параметр. Из уравнения (8) получим:

$$\Theta_0(i-1)+\Omega-\frac{\pi}{2}-\pi<\sum_{g=1}^{m}\Theta_g<\Theta_0(i-1)+\Omega-\frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Для формирования искомого набора пределов коэффициентов полинома $R_b(p)$ в (9) подставляется значение угла Θ_0, и для всех значений i выбираются такие Ω_i=0,π, чтобы неравенства (4) и (9) выполнялись. В результате получим соответствие набо-

ров пределов коэффициентов некоторым интервалам $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$. Если Ω_i=0, то значение i-го коэффициента в полиноме $R_b(p)$ будет максимальным, если $\Omega_i=\pi$ – минимальным. Заметим, что каждому набору коэффициентов соответствует интервал значений $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$.

В табл. 1, 2 представлены зависимости наборов коэффициентов полинома (3) и соответствующие им $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$ для некоторых Θ_0.

4. Анализ областей расположения свободных полюсов

Так как выбор пределов коэффициентов полинома (3), определяющих корень с наибольшей колебательностью, зависит от $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$, то следует определить, каким областям расположения свободных полюсов соответствуют найденные интервалы $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$.

Рассмотрим выражение:

$$\sum_{g=1}^{m}\Theta_g = \mathrm{arcctg}\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_2^2-\beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)}\right). \qquad (10)$$

Пусть $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g=\Psi$, где Ψ некоторый фиксированный угол. На основании (10) построим на плоскости корней границу, соответствующую значению Ψ при заданных доминирующих полюсах α_2=–2, β_2=±2, рис. 1.

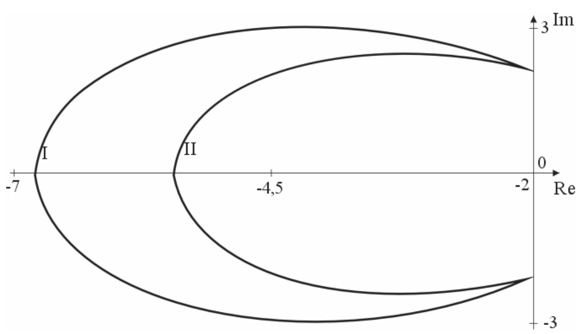


Рис. 1. *Геометрическое место расположения полюсов при* $n=4$: I) $\Psi=\frac{\pi}{4}$, II) $\Psi=\frac{\pi}{3}$

Таблица 1. *Зависимость набора коэффициентов полинома (3) и соответствующие им* $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$ *для некоторых* Θ_0 *для полинома*